Giochi combinatori imparziali e misère play

Alessio Di Prisa

27/07/2021

Giochi imparziali

Definizione

Un **gioco combinatorio** è un gioco a due giocatori, deterministico e ad informazione perfetta.

Giochi imparziali

Definizione

Un **gioco combinatorio** è un gioco a due giocatori, deterministico e ad informazione perfetta.

Nel seguito ci interesseremo unicamente a giochi:

- **imparziali**, i.e. le mosse sono le stesse per i due giocatori;
- **loopfree**, i.e. nessuna posizione è raggiunta più volte;
- **finiti**, i.e. terminano necessariamente dopo finiti turni.

Giochi imparziali

Notazione

Con il termine **gioco** indicheremo nel seguito una posizione specifica G giocabile con un **sistema di regole** Γ.

Giochi imparziali

Notazione

Con il termine **gioco** indicheremo nel seguito una posizione specifica G giocabile con un **sistema di regole** Γ.

Notazione

Rappresenteremo un gioco G come l'insieme delle sue **opzioni**

$$G = \{G_1, \ldots, G_k\}.$$

Giochi imparziali

Notazione

Un altro modo per rappresentare un gioco G è con un albero, che abbia:

- un vertice v per ogni posizione raggiungibile da G;
- un arco orientato $v \longrightarrow w$ se w è un'opzione di v.

Giochi imparziali

Notazione

Un altro modo per rappresentare un gioco G è con un albero, che abbia:

- un vertice v per ogni posizione raggiungibile da G;
- un arco orientato $v \longrightarrow w$ se w è un'opzione di v.

L'altezza dell'albero associato è detto **birthday** di G, che indichiamo con $\mathrm{b}(G)$.

Giochi imparziali

Condizioni di vittoria

Nel seguito ci interesseremo a studiare due tipi di **condizioni di vittoria**:

- **Normal play**: l'ultimo giocatore a fare una mossa vince;
- **Misère play**: l'ultimo giocatore a fare una mossa perde.

Nim

Definizione

Nim si gioca con un certo numero di pile di elementi di lunghezza arbitraria. Ad ogni turno un giocatore può rimuovere un qualsiasi numero di elementi da una sola pila (eventualmente tutti).

Nim

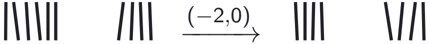
Definizione

Nim si gioca con un certo numero di pile di elementi di lunghezza arbitraria. Ad ogni turno un giocatore può rimuovere un qualsiasi numero di elementi da una sola pila (eventualmente tutti).

Nim

Definizione

Nim si gioca con un certo numero di pile di elementi di lunghezza arbitraria. Ad ogni turno un giocatore può rimuovere un qualsiasi numero di elementi da una sola pila (eventualmente tutti).



Nim

Definizione

Nim si gioca con un certo numero di pile di elementi di lunghezza arbitraria. Ad ogni turno un giocatore può rimuovere un qualsiasi numero di elementi da una sola pila (eventualmente tutti).

Nim

Definizione

Nim si gioca con un certo numero di pile di elementi di lunghezza arbitraria. Ad ogni turno un giocatore può rimuovere un qualsiasi numero di elementi da una sola pila (eventualmente tutti).

Nim

Definizione

Denoteremo con $*n$ la posizione di Nim giocata su un'unica pila con n elementi. Osserviamo che $*n = \{0, *, \ldots, *(n-1)\}$.

Nim

Definizione

Denoteremo con $*n$ la posizione di Nim giocata su un'unica pila con n elementi. Osserviamo che $*n = \{0, *, \dots, *(n-1)\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & *3 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & *2 \arrow[dl] \arrow[d] & * \arrow[d] & 0 \\
 * \arrow[d] & 0 & 0 & \\
 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Outcome

Definizione

L'**outcome in normal/misère play** di un gioco G è definito come

- $o^{\pm}(G) = \mathcal{P}$ se il secondo giocatore che muove su G ha una strategia vincente,
- $o^{\pm}(G) = \mathscr{N}$ se il primo giocatore che muove su G ha una strategia vincente.

Outcome

Esempio

In normal play abbiamo

- $o^+(0) = \mathscr{P}$
- $o^+(*n) = \mathscr{N}$ per $n > 0$ (la strategia vincente è rimuovere tutta la pila).

Outcome

Esempio

In misère play abbiamo invece:

- $o^-(0) = \mathscr{N}$,
- $o^-(*1) = \mathscr{P}$ (chi gioca è costretto a rimuovere tutta la pila),
- $o^-(*n) = \mathscr{N}$ per $n > 1$ (la strategia vincente è rimuovere tutti gli elementi eccetto uno).

Outcome

Osservazione

Considerando solo giochi finiti la definizione è ben posta, infatti vale che:

- $o^+(G) = \mathscr{P} \iff o^+(G') = \mathscr{N}$ per ogni $G' \in G$,

Outcome

Osservazione

Considerando solo giochi finiti la definizione è ben posta, infatti vale che:

- $o^{+}(G) = \mathscr{P} \iff o^{+}(G') = \mathscr{N}$ per ogni $G' \in G$,
- $o^{-}(G) = \mathscr{P} \iff G \neq 0$ e $o^{-}(G') = \mathscr{N}$ per ogni $G' \in G$.

Somma tra giochi

Definizione

Siano G e H due giochi. Definiamo ricorsivamente la **somma** $G + H$ di due giochi come:

Somma tra giochi

Definizione

Siano G e H due giochi. Definiamo ricorsivamenta la **somma** $G+H$ di due giochi come:

- $G+0=G$,
- $0+H=H$,
- $G+H=\{G'+H \mid G'\in G\}\cup\{G+H' \mid H'\in H\}$.

Somma tra giochi

Definizione

Siano G e H due giochi. Definiamo ricorsivamenta la **somma** $G + H$ di due giochi come:

- $G + 0 = G$,
- $0 + H = H$,
- $G + H = \{G' + H \mid G' \in G\} \cup \{G + H' \mid H' \in H\}$.

Esempio

$$G = \quad \text{|||} \qquad \text{|||||||} \qquad \text{||} \quad = *3 + *7 + *2.$$

Uguaglianza in normal play

Definizione

Due giochi G e H si dicono **uguali** $G = H$, se per ogni altro gioco X si ha $o^+(G+X) = o^+(H+X)$.

Uguaglianza in normal play

Proposizione

Siano G, H, K giochi. Se $G = H$ allora $G + K = H + K$.

Uguaglianza in normal play

Proposizione

Siano G, H, K giochi. Se $G = H$ allora $G + K = H + K$.

Segue subito dalla definizione: per ogni altro gioco X si ha

$$o^+((G+K)+X) = o^+(G+(K+X)) = o^+(H+(K+X)) = o^+((H+K)+X).$$

Uguaglianza in normal play

Replacement Lemma

Siano $G = \{G_1, \ldots, G_k\}$ e $G_1 = H$.
Allora se $\widetilde{G} = \{H, G_2, \ldots, G_k\}$ si ha $G = \widetilde{G}$.

Uguaglianza in normal play

Replacement Lemma

Siano $G = \{G_1, \dots, G_k\}$ e $G_1 = H$.
Allora se $\widetilde{G} = \{H, G_2, \dots, G_k\}$ si ha $G = \widetilde{G}$.

Mostriamo che $o^+(G + X) = o^+(\widetilde{G} + X)$ per induzione su $\mathrm{b}(X)$.

$$G + X = \{G_1 + X\} \cup \{G_i + X\}_{i=2}^{n} \cup \{G + X' \mid X' \in X\}$$

$$G' + X = \{H + X\} \cup \{G_i + X\}_{i=2}^{n} \cup \{G' + X \mid X' \in X\}$$

e concludiamo per ipotesi induttiva su $\mathrm{b}(X)$ che le opzioni dei due giochi hanno gli stessi outcome.

Uguaglianza in normal play

Proposizione

Per ogni gioco G vale $G + G = 0$.

Uguaglianza in normal play

Proposizione

Per ogni gioco G vale $G + G = 0$.

Proposizione

Siano G, H giochi, allora sono equivalenti:

1. $G = H$,
2. $o^+(G + H) = \mathscr{P}$.

Uguaglianza in normal play

Proposizione

Per ogni gioco G vale $G + G = 0$.

Proposizione

Siano G, H giochi, allora sono equivalenti:

1. $G = H$,
2. $o^+(G + H) = \mathscr{P}$.

Corollario

Il gioco 0 è l'unico gioco G a meno di uguaglianza per cui $o^+(G) = \mathscr{P}$.

Mex rule

Definizione

Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto. Definiamo il **minimo escluso** di S come

$$\text{mex}(S) = \min\{n \in \mathbb{N} : n \notin S\}.$$

Mex rule

Definizione

Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto. Definiamo il **minimo escluso** di S come

$$\text{mex}(S) = \min\{n \in \mathbb{N} : n \notin S\}.$$

Teorema (mex rule)

Sia $G = \{*a_1, \ldots, *a_k\}$ e $m = \text{mex}(a_1, \ldots, a_k)$. Allora $G = *m$.

Teorema di Sprague-Grundy

Teorema

Sia G un gioco imparziale, allora $G = *m$ per qualche $m = \mathcal{G}(G)$ detto **Groundy value** di G. .

Teorema di Sprague-Grundy

Scriviamo $n \in \mathbb{N}$ come $n = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_i 2^i$, con $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_i \neq 0$ per finiti i. Allora la bigezione

$$\mathbb{N} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$n \longrightarrow (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$$

rende $\mathbb{N}$ un gruppo abeliano, che denotiamo con $(\mathbb{N}, \oplus)$.

Teorema di Sprague-Grundy

Scriviamo $n \in \mathbb{N}$ come $n = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_i 2^i$, con $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_i \neq 0$ per finiti i. Allora la bigezione

$$\mathbb{N} \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$n \longrightarrow (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$$

rende $\mathbb{N}$ un gruppo abeliano, che denotiamo con $(\mathbb{N}, \oplus)$.

Lemma

Per ogni $a, b \in \mathbb{N}$ si ha $*a + *b = *(a \oplus b)$.

Teorema di Sprague-Grundy

Teorema

L'insieme dei giochi imparziali modulo uguaglianza, con la somma tra giochi è un gruppo abeliano, con identità 0 e naturalmente isomorfo a $(\mathbb{N}, \oplus)$.

Giochi ottali

Definizione

Un **codice ottale** è una sequenza $0.d_1 d_2 \ldots$ di cifre $0 \leq d_i < 8$. Ogni codice ottale definisce un sistema di regole Γ, detto **gioco ottale**, giocato con pile di elementi.

Il codice specifica come è possibile muovere come segue: scriviamo $d_k = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot 2 + \varepsilon_2 \cdot 4$, $\varepsilon_i = 0, 1$. Allora possiamo rimuovere k elementi da una pila

- eliminandola interamente $\iff \varepsilon_0 = 1$,
- dalla cima, lasciandone almeno uno $\iff \varepsilon_1 = 1$,
- dal centro, lasciandone almeno uno per parte $\iff \varepsilon_2 = 1$.

Giochi ottali

- **Nim** è rappresentato dalla sequenza $0.333\ldots$,
- **Kayles** è rappresentato da 0.77,
- **Dawson's Kayles** è rappresentato da 0.07,
- **Guiles** è il gioco con codice ottale 0.15.

Giochi ottali

Notazione

Fissato un gioco ottale Γ, indichiamo con H_n la posizione giocata con una pila di $n \in \mathbb{N}$ elementi.

Giochi ottali

Notazione

Fissato un gioco ottale Γ, indichiamo con H_n la posizione giocata con una pila di $n \in \mathbb{N}$ elementi.

Dal teorema di Sprague-Grundy, per risolvere Γ è sufficiente conoscere $\mathcal{G}(H_n)$ per ogni n.

Teorema di periodicità

Teorema

Sia Γ un gioco ottale con codice $0.d_1 d_2 \ldots d_k$ con $d_k \neq 0$. Se esistono $n_0 \geq 0$, $p > 0$ per cui

$$\mathcal{G}(H_{n+p}) = \mathcal{G}(H_n) \text{ per } n \text{ con } n_0 \leq n < 2n_0 + p + k.$$

Allora $\mathcal{G}(H_n) = \mathcal{G}(H_{n+p})$ per ogni $n \geq n_0$.

Teorema di periodicità

Teorema di periodicità

Esempio

Kayles e Dawson's Kayles sono giochi periodici, con periodo rispettivamente 12 e 34.

Teorema di periodicità

Esempio

Kayles e Dawson's Kayles sono giochi periodici, con periodo rispettivamente 12 e 34.

Calcoliamo per esempio i Grundy values del gioco **0.23**:

Teorema di periodicità

Esempio

Kayles e Dawson's Kayles sono giochi periodici, con periodo rispettivamente 12 e 34.

Calcoliamo per esempio i Grundy values del gioco **0.23**: H_0 e H_1 non hanno opzioni, per cui $\mathcal{G}(H_0) = \mathcal{G}(H_1) = 0$.

Teorema di periodicità

Esempio

Kayles e Dawson's Kayles sono giochi periodici, con periodo rispettivamente 12 e 34.

Calcoliamo per esempio i Grundy values del gioco **0.23**: H_0 e H_1 non hanno opzioni, per cui $\mathcal{G}(H_0) = \mathcal{G}(H_1) = 0$.
Invece per $n \geq 2$ vale che $H_n = \{H_{n-1}, H_{n-2}\}$ dunque $\mathcal{G}(H_n) = \text{mex}(\mathcal{G}(H_{n-2}), \mathcal{G}(H_{n-1}))$, da cui

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathcal{G}$	0	0	1	2	0	1	2	0	1	...

Teorema di periodicità

Esempio

Kayles e Dawson's Kayles sono giochi periodici, con periodo rispettivamente 12 e 34.

Calcoliamo per esempio i Grundy values del gioco **0.23**: H_0 e H_1 non hanno opzioni, per cui $\mathcal{G}(H_0) = \mathcal{G}(H_1) = 0$.
Invece per $n \geq 2$ vale che $H_n = \{H_{n-1}, H_{n-2}\}$ dunque $\mathcal{G}(H_n) = \text{mex}(\mathcal{G}(H_{n-2}), \mathcal{G}(H_{n-1}))$, da cui

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathcal{G}$	0	0	1	2	0	1	2	0	1	...

Le ipotesi del teorema di periodicità sono quindi soddisfatte e **0.23** è periodico con periodo 3 e antiperiodo 1.

Teorema di periodicità

Teorema (Flammenkamp, 2002)

Il gioco ottale $\mathbf{0.106}$ è periodico, di periodo $328, 226, 140, 474$ e antiperiodo $465, 384, 263, 797$.

Teorema di periodicità

Teorema (Flammenkamp, 2002)

Il gioco ottale $\mathbf{0.106}$ è periodico, di periodo $328, 226, 140, 474$ e antiperiodo $465, 384, 263, 797$.

Domanda aperta

Esistono giochi ottali con codice finito che siano aperiodici?

Uguaglianza misère

Definizione

Due giochi G e H si dicono **uguali**, $G = H$ se per ogni altro gioco X si ha $o^-(G+X) = o^-(H+X)$.

Uguaglianza misère

Proposizione

In misère play vale l'identità $* + * = 0$.

Uguaglianza misère

Proposizione

In misère play vale l'identità $* + * = 0$.

Procediamo per induzione su $\mathrm{b}(X)$:

- $X = 0 \Rightarrow o^-(* + *) = o^-(0) = \mathscr{N}$,
- $X = * \Rightarrow o^-(* + * + *) = o^-(*) = \mathscr{P}$.

Uguaglianza misère

Proposizione

In misère play vale l'identità $* + * = 0$.

Procediamo per induzione su b(X):

- $X = 0 \Rightarrow o^-(* + *) = o^-(0) = \mathscr{N}$,
- $X = * \Rightarrow o^-(* + * + *) = o^-(*) = \mathscr{P}$.

Sia ora $X \neq 0, *$, allora

- se $o^-(X) = \mathscr{N}$, il primo giocatore muove su X in una $\mathscr{P}$-position X' e per ipotesi induttiva $o^-(* + * + X') = \mathscr{P}$;

Uguaglianza misère

Proposizione

In misère play vale l'identità $* + * = 0$.

Procediamo per induzione su b(X):

- $X = 0 \Rightarrow o^-(* + *) = o^-(0) = \mathscr{N}$,
- $X = * \Rightarrow o^-(* + * + *) = o^-(*) = \mathscr{P}$.

Sia ora $X \neq 0, *$, allora

- se $o^-(X) = \mathscr{N}$, il primo giocatore muove su X in una $\mathscr{P}$-position X' e per ipotesi induttiva $o^-(* + * + X') = \mathscr{P}$;
- se $o^-(X) = \mathscr{P}$, il primo giocatore può muovere solo in $* + * + X'$ con X' una $\mathscr{N}$-position di X, o in $* + X$, in tal caso il secondo giocatore vince muovendo in X.

Uguaglianza misère

Proposizione

In misère play si ha che $*2 + *2 \neq 0$. In generale quindi è falsa l'identità $G + G = 0$.

Uguaglianza misère

Proposizione

In misère play si ha che $*2 + *2 \neq 0$. In generale quindi è falsa l'identità $G + G = 0$.

Dall'albero associato vediamo che $o^-(*2 + *2) = \mathscr{P}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & *2 + *2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
*2 + 0 \arrow[d] & & *2 + * \arrow[d] \\
* + 0 & & * + 0
\end{tikzcd}
$$

Uguaglianza misère

Proposizione

Sia $G = \{*2\}$, allora $G \neq *m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Uguaglianza misère

Proposizione

Sia $G = \{*2\}$, allora $G \neq *m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

L'unica opzione di G è $*2$, quindi $o^-(G) = \mathscr{P}$. Dunque l'unica possibilità da escludere è $G = *$.

Uguaglianza misère

Proposizione

Sia $G = \{*2\}$, allora $G \neq *m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

L'unica opzione di G è $*2$, quindi $o^{-}(G) = \mathscr{P}$. Dunque l'unica possibilità da escludere è $G = *$.
Notiamo che $o^{-}(G + *) = \mathscr{N}$: basta che il primo giocatore muova in G che è una $\mathscr{P}$-position.

Uguaglianza misère

Proposizione

Sia $G = \{*2\}$, allora $G \neq *m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

L'unica opzione di G è $*2$, quindi $o^-(G) = \mathscr{P}$. Dunque l'unica possibilità da escludere è $G = *$.
Notiamo che $o^-(G + *) = \mathscr{N}$: basta che il primo giocatore muova in G che è una $\mathscr{P}$-position.
Invece $o^-(G + G) = \mathscr{P}$: l'unica opzione è $*2 + G$, a questo punto il secondo può muovere in $*2 + *2$, che è una $\mathscr{P}$-position. Segue che $G \neq *$.

Normal play vs misère play

Corollario

Esistono giochi che in misère play non sono uguali a nessuna pila di Nim.

Normal play vs misère play

Corollario

Esistono giochi che in misère play non sono uguali a nessuna pila di Nim.

Teorema

A meno di uguaglianza misère vi sono

- 41780 giochi con birthday 5,
- $> 2^{4171779}$ giochi con birthday 6.

Quozienti misère

Idea

Per risolvere un gioco combinatorio Γ è sufficiente sapere come interagiscono tra loro solo le posizioni G che compaiono delle partite di Γ.
L'uguaglianza misère è troppo restrittiva, è necessario quindi rilassare la relazione di equivalenza sui giochi.

Quozienti misère

Definizione

Diremo che un insieme di giochi $\mathcal{A}$ è **chiuso** se

- è chiuso per somma,
- per ogni $G \in \mathcal{A}$, se $G' \in G$ allora $G' \in \mathcal{A}$.

Quozienti misère

Definizione

Diremo che un insieme di giochi $\mathcal{A}$ è **chiuso** se

- è chiuso per somma,
- per ogni $G \in \mathcal{A}$, se $G' \in G$ allora $G' \in \mathcal{A}$.

Notiamo che se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ è chiuso allora $0 \in \mathcal{A}$. Dunque $(\mathcal{A}, +)$ è un monoide commutativo.

Quozienti misère

Definizione

Diremo che un insieme di giochi $\mathcal{A}$ è **chiuso** se

- è chiuso per somma,
- per ogni $G \in \mathcal{A}$, se $G' \in G$ allora $G' \in \mathcal{A}$.

Notiamo che se $\mathcal{A} \neq \emptyset$ è chiuso allora $0 \in \mathcal{A}$. Dunque $(\mathcal{A}, +)$ è un monoide commutativo.

Esempio

L'insieme delle posizioni di un gioco ottale è chiuso.

Quozienti misère

Definizione

Sia $\mathcal{A}$ un qualunque insieme di giochi imparziali. Definiamo

- $\mathrm{hcl}(\mathcal{A}) = \{$sottoposizioni di tutti i giochi di $\mathcal{A}\}$,
- $\mathrm{cl}(\mathcal{A}) =$ chiusura per somma di $\mathrm{hcl}(\mathcal{A})$.

Quozienti misère

Definizione

Sia $\mathcal{A}$ un insieme di giochi chiuso. Allora per $G, H \in \mathcal{A}$ poniamo

$$G \equiv_{\mathcal{A}} H \iff o^-(G+X) = o^-(H+X) \text{ per ogni } X \in \mathcal{A}.$$

Quozienti misère

Definizione

Sia $\mathcal{A}$ un insieme di giochi chiuso. Allora per $G, H \in \mathcal{A}$ poniamo

$$G \equiv_{\mathcal{A}} H \iff o^{-}(G+X) = o^{-}(H+X) \text{ per ogni } X \in \mathcal{A}.$$

Il quoziente $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\equiv_{\mathcal{A}}$ è ancora un monoide commutativo e la proiezione $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Q}$ è un morfismo di monoidi.

Quozienti misère

Definizione

Sia $\mathcal{P} = \{\Phi(G) \mid G \in \mathcal{A},\ o^-(G) = \mathscr{P}\}$. La coppia $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = (\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ è detta **quoziente misère** di $\mathcal{A}$.

Quozienti misère

Definizione

Sia $\mathcal{P} = \{\Phi(G) \mid G \in \mathcal{A},\ o^{-}(G) = \mathscr{P}\}$. La coppia $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = (\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ è detta **quoziente misère** di $\mathcal{A}$.

Definizione

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle posizioni di un gioco Γ.
Allora $\mathcal{Q}(\Gamma) = \mathcal{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A}))$ è il **quoziente pieno** di Γ.

Quozienti misère

Definizione

Sia $\mathcal{P} = \{\Phi(G) \mid G \in \mathcal{A},\ o^-(G) = \mathscr{P}\}$. La coppia $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = (\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ è detta **quoziente misère** di $\mathcal{A}$.

Definizione

Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle posizioni di un gioco Γ.
Allora $\mathcal{Q}(\Gamma) = \mathcal{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A}))$ è il **quoziente pieno** di Γ.
Se Γ è un gioco ottale, $\mathcal{Q}_n(\Gamma) = \mathcal{Q}(\mathrm{cl}(H_0, \ldots, H_n))$ è il suo **n-esimo quoziente parziale**.

Quozienti misère

Idea

Sia Γ un gioco ottale. Se conosciamo $\mathcal{Q}(\Gamma)$ e $\Phi(H_n)$ per ogni n possiamo determinare l'outcome di $G = H_{n_1} + \cdots + H_{n_k}$ calcolando $\Phi(G) = \Phi(H_{n_1}) \ldots \Phi(H_{n_k})$ e controllando se $\Phi(G) \in \mathcal{P}$.

Quozienti misère

Idea

Sia Γ un gioco ottale. Se conosciamo $\mathcal{Q}(\Gamma)$ e $\Phi(H_n)$ per ogni n possiamo determinare l'outcome di $G = H_{n_1} + \cdots + H_{n_k}$ calcolando $\Phi(G) = \Phi(H_{n_1}) \ldots \Phi(H_{n_k})$ e controllando se $\Phi(G) \in \mathcal{P}$.
In particolare se $\mathcal{Q}(\Gamma)$ è finito, il problema è ridotto a fare k moltiplicazioni in un monoide finito.

Quozienti misère

Proposizione

Siano $G = m * + n * 2$ e $H = m' * + n' * 2$, con $n, n' \geq 1$ e $(m, n) \equiv (m', n')$ *mod* 2 allora $[G] = [H] \in \mathcal{T}_2 = \mathcal{Q}(\text{cl}(*, *2))$.

Quozienti misère

Proposizione

Siano $G = m * + n * 2$ e $H = m' * + n' * 2$, con $n, n' \geq 1$ e $(m, n) \equiv (m', n')$ *mod* 2 allora $[G] = [H] \in \mathcal{T}_2 = \mathcal{Q}(\mathrm{cl}(*, *2))$.

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathcal{A} & [0] & [*] & [*2] & [*2 + *] & [*2 + *2] & [*2 + *2 + *] \\ \mathcal{T}_2 & 1 & a & b & ab & b^2 & ab^2 \\ o^- & \mathscr{N} & \mathscr{P} & \mathscr{N} & \mathscr{N} & \mathscr{P} & \mathscr{N} \end{array}$$

$$\mathcal{T}_2 \cong \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = b \rangle.$$

Teorema di periodicità

Lemma

Sia $\mathcal{A}$ un insieme chiuso di giochi e G un gioco le cui opzioni sono in $\mathcal{A}$. Se per qualche $H \in \mathcal{A}$ si ha

$$\{\Phi(G') \mid G' \text{ opzione di } G\} = \{\Phi(H') \mid H' \text{ opzione di } H\}$$

allora $\mathcal{Q}(\mathrm{cl}(\mathcal{A} \cup \{G\})) = \mathcal{Q}(A)$ e $\Phi(G) = \Phi(H)$.

Teorema di periodicità

Idea dimostrazione

È sufficiente mostrare che

$$o^-((n+1)G + X) = o^-(H + nG + X) \text{per ogni } n \text{ e } X \in \mathcal{A}.$$

Per questo si procedere per induzione su n e $\mathrm{b}(X)$ e si mostra che i due giochi sopra hanno opzioni con gli stessi outcome.

Teorema di periodicità

Teorema

Sia Γ un gioco ottale con codice di lunghezza k finita. Se per qualche $n_0, p > 0$ si ha $\Phi_M(H_{n+p}) = \Phi_M(H_n)$ per $n_0 \leq n \leq 2n_0 + p + k$, dove $M = 2n_0 + 2p + k$, allora

- $\mathcal{Q}(\Gamma) \cong \mathcal{Q}_M(\Gamma)$ e
- $\Phi(H_n + p) = \Phi(H_n)$ per ogni $n \geq n_0$.

Teorema di periodicità

Teorema di periodicità

Esempio

È possibile dimostrare, ad esempio utilizzando il programma *MisèreSolver* di A. Siegel, che il quoziente pieno di Kayles ha ordine 40 e che

$$\Phi(H_{n+12}) = \Phi(H_n) \text{ per } n \geq 71.$$

Teorema di periodicità

Riprendendo l'esempio del gioco ottale 0.23 è possibile verificare che $\mathcal{Q}_n \cong \mathcal{T}_2 = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = b \rangle$ per $3 \leq n \leq \infty$ e che il gioco soddisfa la stessa periodicità del caso normal play:

$\mathcal{A}$	H_0	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	...
$\mathcal{Q}$	1	1	a	b	1	a	b	1	a	...

Quozienti tame

Definizione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ indichiamo il 2^{n-1}-esimo quoziente parziale di Nim con

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{Q}(*, \dots, *2^{n-1}),$$

e il quoziente pieno di Nim con $\mathcal{T}_\infty$.

Quozienti tame

Si dimostra che

- $|\mathcal{T}_0| = 1$,
- $|\mathcal{T}_1| = 2$,
- $|\mathcal{T}_n| = 2^n + 2$ per ogni $n \geq 2$.

Quozienti tame

Si dimostra che

- $|\mathcal{T}_0| = 1$,
- $|\mathcal{T}_1| = 2$,
- $|\mathcal{T}_n| = 2^n + 2$ per ogni $n \geq 2$.

Inoltre questi hanno come presentazione:

$$\mathcal{T}_n = \langle a, b_1, \ldots, b_n \mid a^2 = 1, b_i^3 = b_i, b_i^2 = b_j^2 \rangle$$

per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dove $a = [*]$ e $b_i = [*2^i]$.

Quozienti tame

Teorema

Per ogni $2 \leq n \leq \infty$ si ha

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{K}_n \cup \{1, a\}$$

dove $\mathcal{K}_n$ è un sottogruppo isomorfo a $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
$\mathcal{K}_n$ è detto **kernel** del monoide, e corrisponde alle posizioni di Nim in misère play che si comportano esattamente come in normal play.

Giochi tame e wild

Definizione

Un insieme di giochi $\mathcal{A}$ è detto **tame** se si ha $\mathcal{Q}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{T}_n$ per qualche $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, altrimenti è detto **wild**.

La definizione si estende ai sistemi di regole: Γ è detto essere rispettivamente **tame** o **wild** a seconda se lo è l'insieme delle sue posizioni di gioco.

Giochi tame e wild

Esempio

Non tutti i giochi sono tame, ad esempio utilizzando *MisèreSolver* è possibile dimostrare che il gioco ottale **0.75** ha come quoziente $\mathcal{R}_8 = \{1, a, b, ab, z, az, t, at\}$, che non è tame.
Inoltre $\mathcal{R}_8$ è stato dimostrato essere il più piccolo quoziente misère non tame e l'unico quoziente di ordine 8.

Andiamo ora a vedere la definizione generale di kernel di un monoide, e come questo leghi le modalità di gioco normal play e misère.

Normal play vs misère play

D'ora in poi sia $\mathcal{Q}$ un monoide commutativo finito. Introduciamo alcune definizioni:

- $x|y$, x **divide** y se esiste $z \in \mathcal{Q}$ per cui $xz = y$;
- x e y sono **mutualmente divisibili** (m.d.) se $x|y$ e $y|x$;
- $x \in \mathcal{Q}$ è **idempotente** se $x^2 = x$

È facile verificare che:

- m.d. è una relazione di equivalenza su $\mathcal{Q}$,
- la classe m.d. di x idempotente è un gruppo con identità x.

Siano $z_1, \ldots, z_k$ gli idempotenti di $\mathcal{Q}$. Allora $z = z_1 \cdot \cdots \cdot z_k$ è idempotente. La classe di mutua divisibilità $\mathcal{K}$ di z è detta **kernel** di $\mathcal{Q}$.

Normal play vs misère play

Teorema

La mappa $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{K}$ data da $x \longmapsto zx$ è un morfismo moltiplicativo surgettivo.

Normal play vs misère play

Definizione

Un quoziente misère finito $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ è detto **normale** se

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{P} = \{z\}.$$

Normal play vs misère play

Definizione

Un quoziente misère finito $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ è detto **normale** se

$$\mathcal{K} \cap \mathcal{P} = \{z\}.$$

Dato un insieme chiuso di giochi $\mathcal{A}$, la proiezione al quoziente

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

è detta essere **fedele** se

$$\Phi(G) = \Phi(H) \Longrightarrow \mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \text{ per ogni } G, H \in \mathcal{A}.$$

Normal play vs misère play

Problema aperto

È vero che ogni proiezione Φ di un quoziente misère è fedele?

Normal play vs misère play

Teorema

Se $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ è normale e Φ è fedele allora per ogni $G, H \in \mathcal{A}$

$$z\Phi(G) = z\Phi(H) \iff \mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H).$$

Questo ci dice quindi che c'è una bigezione tra gli elementi di $\mathcal{K}$ e i Groundy values in normal play per giochi in $\mathcal{A}$.
Abbiamo dunque una "strategia generale" per giocare un gioco misère Γ: è sufficiente giocare le posizioni come se fossimo in normal play, a meno che muovendo non si esca da $\mathcal{K}$. A questo punto è necessario studiare nel dettaglio la struttura di $\mathcal{Q}$.

Bibliografia

- *Misère Games and Misère Quotients*
  A. Siegel, 2006
- *Combinatorial Game Theory*
  A. Siegel, 2013
- *Advances in losing*
  T. Plambeck, 2006
- Sprague-Grundy values of octal games
  A. Flammenkamp, 2002